Связь обусловленности задачи с погрешностью решения методом конечных элементов.

Е.В. Авдеев, (научн. рук. В.А. Фурсов),

Самарский Государственный Аэрокосмический Университет

2011

Погрешность

количество конечных элементов

устойчивость

сходимость используемого численного метода

обусловленность

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$$u(x,0)=0$$

$$u_y(x,0)=\frac{1}{n}\cos(nx)$$

Решение:

$$u(x,y)=\frac{1}{n^2}\,cosn(nx)\,sh(ny)$$

Численное решение уравнения

Граничные условия :

$$f_0(t)=\frac{1}{n^2}\cos(0)\,sh(t)$$

$$f_1(t)=\frac{1}{n^2}\cos(nL)\,sh(t)$$

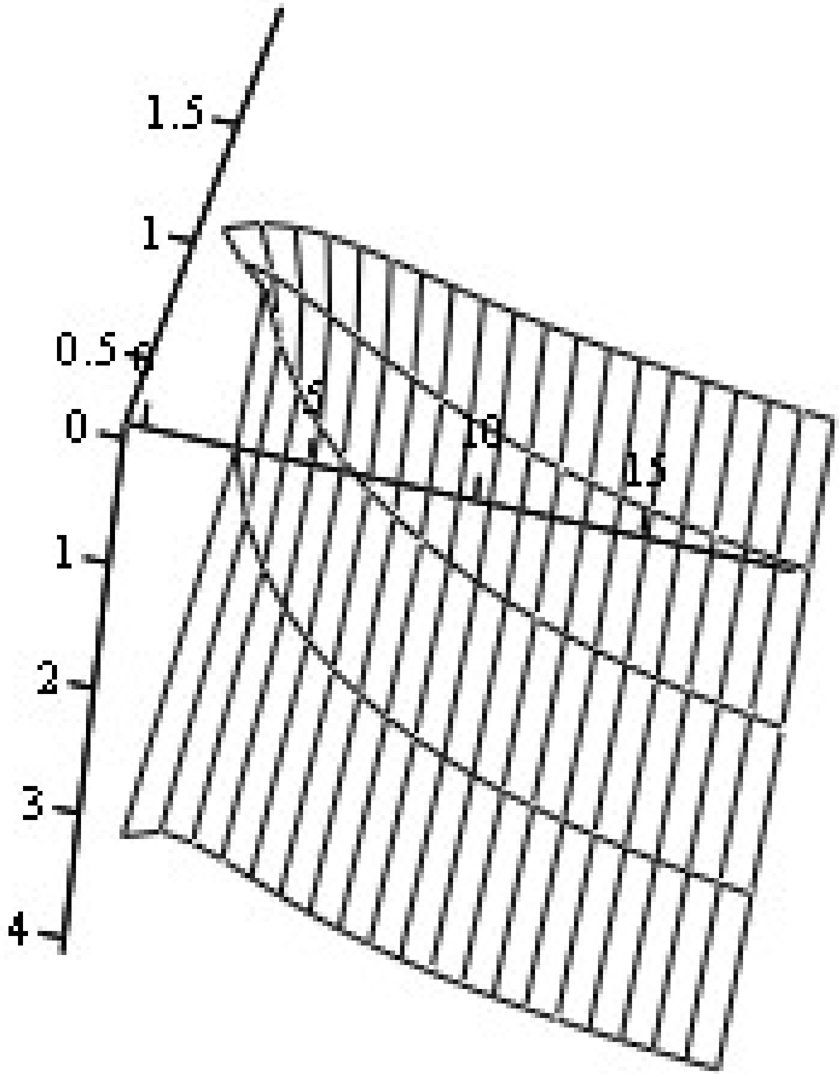
$$u_{i,j}=u(ih,jk),\qquad i=0,1\ldots,n_x=\frac{L}{h},\qquad j=0,1\ldots,n_t=\frac{T}{k},$$

$h-$ *шаг в направлении оси* x;

$k-$ *шаг в направлении оси* t;

$$u_{i,j+1}=-\lambda^2 u_{i+1,j}-\lambda^2 u_{i-1,j}+2(1+\lambda^2)u_{i,j}$$

где $\lambda=\frac{k}{h^2}-$ *устойчивость численного метода*



1.5
1
0.5
0
1
2
3
4
5
10
15

Расчёт показателя обусловленности

$$Построение\ информационной\ матрицы\left(матрицы\ жёсткости\right) A$$

$$для\ i=0..\mathrm{n}-2,\ A_{i,i}=1+2\lambda\ для\ i=0...\mathrm{n}-3,\qquad A_{i+1,i}=-\lambda,\qquad A_{i,i+1}=-\lambda$$

$$\Phi(A)=\frac{\left(\sum a_{i,i}\right)^2}{\sum a_{i,j}^2}$$

$$\Phi-показатель\ обусловленности$$

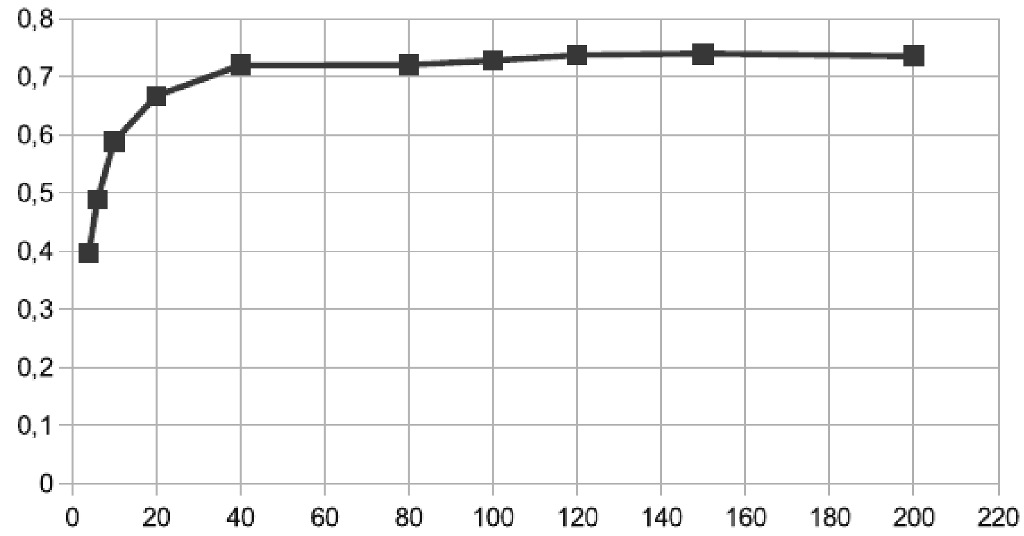


Рис. 1. $\Phi/\mathrm{n}(\mathrm{n})$

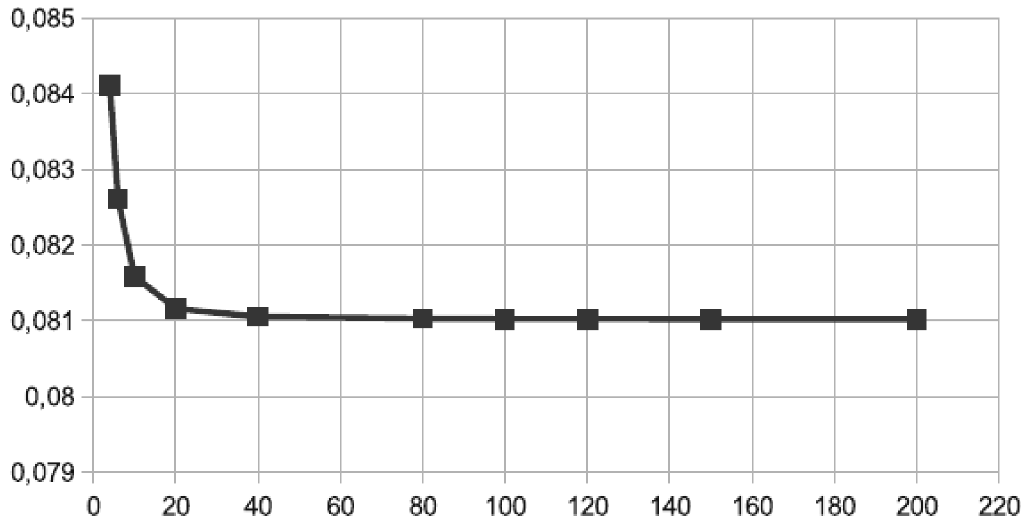


Рис. 2. Погрешность $\Delta u(n)$